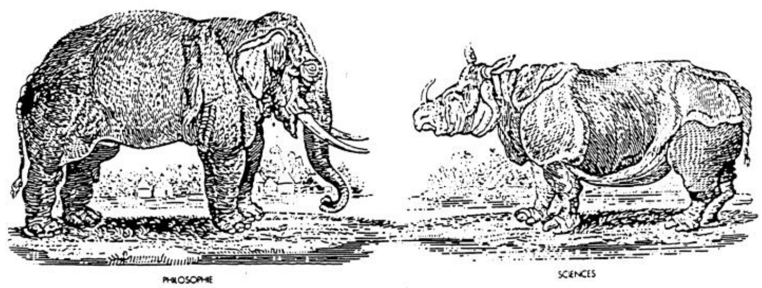
LA CAPTURE DE L'EXTENSION COMME DIALECTIQUE GÉOMÉTRIQUE

GILLES CHATELET

Mars 1991

PAPIER DU COLLÈGE INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE (n^o 8)



Note de l'éditrice L'édition sous LaTeX de cet article a été faite à partir du texte scanné et océrisé. Les images ont été intégrées dans un deuxième temps. Ce sont des captures d'écran du scan original de l'article, trouvé sur le site : `http://www.ciph.org/publications.php?idPapier=08`.

Les paragraphes et retours à la ligne originaux ont été respectés. Les titres de parties ont été uniformisés et l'orthographe corrigée. Des parenthèses fermantes ainsi que des guillemets fermants manquants ont été rajoutés, sans que leur place soit garantie exacte. La page de couverture et celle présentant la liste des numéros déjà parus n'ont pas été reproduites. Enfin les remerciements ont été placés après les notes de la partie IV et non avant comme dans l'original. Alors que l'édition originale contient 36 pages, celle-ci n'en contient que 22. Le fichier retravaillé au format pdf ne pèse plus que 320 Ko au lieu des 5 Mo du scan original.

Anne-Cécile Faure, master 2 CEI recherche, Enssib et Université Lyon-2, janvier 2012.

Table des matières

La page de la version initiale est notée entre parenthèses.

I - La capture de l'extension comme dialectique géométrique page 4 (4)
II - Déduire ou articuler page 7 (10)
III - Le produit géométrique multiplie les formes sans corrompre l'unité page 11 (16)
IV - L'Ambiguïté où germe l'opération page 18 (28)

La capture de l'Extension comme dialectique géométrique dimension et puissance selon l'Ausdehnung de Grassmann (1844)

Nous commentons la première édition (1844) de la Théorie de l'Extension de Grassmann. Rappelons que l'introduction fut très peu appréciée par les mathématiciens de son époque (considérée comme “ inutile ”, “ métaphysique ”, “ obscure ”) et contrastait vivement avec l'hégémonie grandissante du “ style ” axiomatique. Ses découvertes mathématiques ne furent vraiment comprises que vers 1880 (Burali-Forti, Peano) et il a fallu attendre des articles contemporains (Rota et d'autres) pour rendre justice au produit “ impliqué ” (symétrique du produit “ extérieur ”) et découvrir ses utilisations possibles en combinatoire.

Il est évident que Grassmann possédait une culture philosophique et faisait sienne cette idée de l'Idéalisme allemand que la science ne se réduit nullement à l'adoption de règles opératoirement fécondes et à la production de vérités simplement “ déduites ”. Un texte mathématique doit aussi mettre le lecteur en “ état ” de se faire “ une vue d'ensemble ”. Cette vue d'ensemble n'est pas une contemplation générale qui “ survole ” les “ détails ” mais se nourrit de la spécificité du singulier pour atteindre ce plan où naissent de manière contemporaine l'intuitif et le discursif.

Ce type d'exigences rapproche Grassmann de celles de philosophies de la Nature (Schelling - Hegel) qui refusaient la séparation accomplie de l'objet et du sujet et désiraient penser un savoir inobjectif de l'étant et qui pourtant n'est pas rien.

Comme l'intuition intellectuelle, la méthode scientifique exigée par Grassmann introduit à une connaissance qui ne laisse pas intact le dualisme objectif-subjectif, mais au contraire, se risque à la création même de l'objet, à affirmer l'identité fondamentale du produit et de la productivité, identité d'autant mieux pensée, que le mode d'articulation qui les distingue est plus précis. On ne s'étonnera pas si les notions de dimension et d'orientation menacent toujours subrepticement la neutralité de l'observateur face à son objet. On ne peut les penser à la façon dont on s'assure d'une chose.

C'est tout le mérite de Grassmann d'avoir compris que le lecteur devait être capable de reconnaître dans le mode d'expression des formes du saisir de l'extension des degrés homologues aux étapes franchies par son entendement (l'Espace apparaît ainsi comme un Entendement visible).

Nous montrons au chapitre III comment Grassmann par sa notion d'engendrement saisit profondément la dimension et quel parti il tire de l'orientation. Il peut ainsi se dégager des contraintes du spatial (les dimensions y sont figées et n'apprécient que les intervalles-résidus entre les choses) et c'est pourquoi il parvient à saisir un geste qui déploie les “ formations d'extension d'ordre n ” sans le secours du “ réalisme ” géométrique.

Dans la trace d'Oresme, Grassmann utilise toute la puissance du diagramme (base, hauteur, amplitude) et montre qu'une dimension posée en appelle une autre permettant donc de continuer des “ systèmes ” de dimension arbitraire.

Philosophie de la Nature et Géométrie

Cette philosophie a mauvaise presse. Il semble que les historiens de la philosophie acceptent de retenir de Hegel, Schelling et Fichte la partie politique ou esthétique de leur œuvre, mais renoncent à “ sauver ” les philosophies de la Nature de l'idéalisme allemand. Le début du XIX^{e} siècle est pourtant en Allemagne une époque d'échanges prolongés entre scientifiques et philosophes. Schelling avait la “ passion du positif ” et Hege ne voyait pas dans la positivité un ennemi irréductible de la spéculation. Certains travaux aux États-Unis, en Allemagne et en Angleterre insistent sur cet aspect de la philosophie de la Nature et sur l'importance qui y est accordée à la métaphysique comme “ matrice d'idées ” ; ces analyses, cependant, en restent généralement au niveau de la sociologie. L'idéalisme allemand a pourtant tenté de repenser l'articulation entre sciences exactes et spéculation philosophiques sans se limiter à la problématique de la philosophie de la connaissance et en situant l'horizon du pensable bien au-delà des conditions de possibilité de l'objet. Les systèmes ainsi développés s'inscrivent dans la tradition des grands visionnaires de la Renaissance. Un certain type de dialectique géométrique est à l'œuvre explicitement dans les travaux de Steiner, Kummer ou Grassmann.

Rappelons que Schelling disait que la Nature était l'Entendement visible. Grassmann, Hamilton, Kummer pressentaient bien qu'il existait une relations profonde entre le procès d'individuation du sujet connaissant et le procès d'articulation des formes de saisie de l'espace.

Ceci nous amène à étudier le concept d'articulation et à remarquer que le début du XIX^e siècle, apprécié comme l'âge d'or des grands systèmes philosophiques, comme celui de l'émergence de la notion de structure, est peut-être aussi celui où le centre change de statut : le point à l'infini de l'Âge classique cède la place aux points neutres d'indifférence qui marquent les degrés d'équilibre et d'où jaillissent continument les polarités. L'existence d'un tel centre d'indifférence dans les diagrammes électriques et magnétiques fascine physiciens et philosophes spéculatifs. Ce point neutre permet de dépasser les oppositions et montre bien que ce dépassement se paie de l'émergence d'une singularité. Les procès d'individuation ne sauraient être épuisés par des différences quantitatives et supposent un lien où l'entendement fonctionnel s'affaisse, où une incertitude apparaît.

Les philosophes classiques avaient beaucoup spéculé sur l'infini car les “ formes indéterminées ” qu'il secrétait, permettaient d'abolir les différences quantitatives. De tout manière, l'infini était pour les mathématiciens du début du XIX^e siècle une “ singularité ” bien inoffensive et apprivoisée par la perspective qui “ ramenait ” facilement les pôles à distance finie !

Le “ singulier ” menaçant est celui qui révèle (souvent cruellement) la naïveté du “ d'une part et d'autre part ” et qui se manifeste en mathématiques par l'effondrement d'un certain mode “ canonique ” de correspondance : les points de ramification, où se proposent plusieurs saisies fonctionnelles. Ces saisies sont toujours fondées sur l'articulation “ évidente ” d'une ordonnée et d'une abscisse (paramètre) “ générique ” et oblige à opter pour telle ou telle détermination.

Le centre, comme point à l'infini, permettait certes de dominer les différences quantitatives qui séparent les être finis, mais en dominant <u>extérieurement</u> les particularités : le dispositif de porte-à-faux qui le détecte permet d'envelopper tout un faisceau de virtualités sans les confondre : <u>la symétrie est redécouverte comme productrice de différences</u>.

I - LA CAPTURE DE L'EXTENSION COMME DIALECTIQUE GÉOMÉTRIQUE

“ Une ontologie qui passe sous silence la Nature s'enferme dans l'incorporel et donne, pour cette raison même, une image fantastique de l'homme, de l'esprit, de l'histoire ” [1].

Merleau-Ponty aurait pu adresser le même avertissement à toute philosophie (et peut être à toute science !) qui ne connaît que cet Espace étendu, toujours donné en face de nous, ce récipient contenant bon gré, mal gré, des particularités individuées par un repère universel : le monstrueux point-origine de Descartes et Newton. Que reste-t-il de vivant dans cet écoulement, qui tombe perpétuellement en dehors de soi, de cette persévérance dans l'épuisement et l'indéfinité ? Les particularités subjuguées par l'Absolu dont elles sont détachées à jamais, ne peuvent qu'entrer dans une compétition féroce pour les places.

L'espace “ espacé ”, étendu n'est qu'un produit définitif, un agrégat transparent de parties absolument extérieures, rigoureusement actuelles, clairement liées. Aucun enveloppement, aucune articulation ne sont accordés à ces coquilles vides. Elles s'entrechoquent impatientes : l'Espace étendu est bien “ cet être en dehors de soi absolu qui est tout aussi bien purement et simplement ininterrompu, un perpétuel être autre qui est identique à soi ” [2].

Car ces être exsangues, non conformes à leur concept, excroissances permanentes, toujours orphelines du geste qui les pose, ne connaissent que la cruauté des lois de l'impact et de la rareté [3]. Toutes les positions s'aigrissent en pétitions et l'extériorité homogène censée assurer la coexistence paisible des choses, exaspère les contrariétés.

L'espace étendu comme forme affirmée des choses en tant que séparées n'entretient qu'une guerre perfide des natures mortes. Guerre d'ailleurs sans enjeu toutes les places y sont fondamentalement équivalentes !

L'espace étendu ne peut tenir aucune promesse : les possibles qu'il distribue sans pudeur ne sont que des possibilités prises en tant que possibilités, sans espoir de rédemption par actualisation prochaine (ce sont des possibilités actualisée en tant que possible !). L'espace étendu se donne sans réserve parce qu'il est terminé... fini...

Pourtant Platon avait bien vu que le réceptacle participe de l'intelligible mais d'une manière fort obscure. L'espace est ce dans quoi il se trame quelque chose et qui n'est pas nécessairement le chaos.

S'il veut avec le poète s'écrier : “ l'espace était splendide ! ”, le philosophe doit se tenir aux avant poste de l'obscur, assumer de plein fouet la verticalité de l'Être, le jaillissement des dimensions, il doit se laisser hanter par l'espace. La capture de l'extension, entreprise par Grassman et d'autres grands mathématiciens du XIX^e siècle ne peut se satisfaire “ d'une connaissance qui, comme celle de la géométrie ordinaire est tout à fait abstraite et privée de vie ” [4].

Il s'agit d'appréhender toute la positivité du sortir de soi, de cet acte permanent d'auto-production, sans l'idolâtre et sans oublier que le positif véritable est “ celui qui se souvient d'avoir été posé ” (Hegel). La chose concrète est. Elle n'est plus l'obstination têtue d'une pétition d'existence.

Cette passion du positif saisit l'instant où l'Espace étendu frissonne enfin des virtualités qui l'habitent, et nous invite à éprouver la dimension comme invention d'une articulation. Elle nous conduit pour ainsi dire par la main pour réapprendre le mouvement qui sépare et lie à la fois.

C'est bien l'articulation qui permet de se situer résolument en dehors de toute opposition et donc de dominer toute opposition. Car il s'agit plus d'épargner les vieux dualismes : sujet-objet, forme-contenu, etc... ni de se laisser submerger par la confusion de quelque " bouillie primordiale ".
Une articulation convenable permet certes d'intégrer positivement toutes les forces prisonnières des contrastes, mais elle s'accompagne toujours de la naissance d'une singularité. C'est précisément ce qui la distingue du vulgaire récolement ou du douteux agrégat. Si l'articulation libère un nouveau mode de l'homogène, c'est toujours en introduisant une torsion.

Si avec Schelling, le philosophe-géomètre veut prendre résolument " le point de vue de la productivité dans le fini ", il doit se faire forgeron et ne plus dégrader la particularité en débris.
Il saura alors apprécier dans un simple fragment l'adresse et la continuité d'un geste. Sa science se montre alors capable de réactiver une productivité jamais éteinte dans son produit et révèle que le " même esprit est à l'œuvre dans les productions de la Nature et les créations de la liberté ".

C'est bien ce qui rend remarquable la théorie de l'Extension de Grassmann. Elle constitue une véritable pédagogie des formes du saisir de l'Espace.
Pour l'apprenti géomètre qui " sait penser librement, l'assimilation des connaissances devient alors une vraie reproduction " à condition de l'initier au sujet de manière " scientifique ". La géométrie présente un caractère " scientifique " (il faut comprendre ici " systématique "), comme la Philosophie, si elle conduit le lecteur à la nécessité d'admettre chaque vérité singulière la (déduction) surtout si elle le met dans une situation où il peut avoir une " vue d'ensemble " [5]. Cette vue d'ensemble n'est pas une contemplation distante de dilettante ; elle participe à l'action : c'est une intuition intellectuelle au sens où l'entend la philosophie de la Nature. Elle nous transporte dans cette zone privilégiée où intuition et discursivité nouent une vivante unité. Elle n'est ni a priori, ni a posteriori : elle est contemporaine de ce qu'elle saisit. Elle prend chaque être à son niveau d'unité sans le décomposer en éléments, ni en le déposant dans un " fond de réalité " plus vaste.

Cette démarche scientifique ne se réduit nullement à l'adoption d'une panoplie de règles (fût-elle " opératoirement féconde "). Grâce à elle, le lecteur doit être capable de reconnaître dans le mode d'exposition des formes des degrés homologues aux étapes de son propre cheminement. La capture de l'extension ne concerne pas seulement la connaissance du sujet, elle se nourrit de l'individuation de la connaissance du sujet [6]. On ne construit pas l'Espace en assemblant des formes comme les pièces d'un mécano (on tiendrait alors pour acquises les articulations !). Il ne s'agit pas d'ailleurs de construire l'Espace mais de se laisser envoûter par un rythme : celui qui noue et tisse des homogènes gorgés de tensions.

Bien plus qu'un " ordre en progrès " [7], la capture de l'extension est une individuation en progrès : celle du lecteur qui peut alors pressentir " directement la vérité suivante ", il prend l'habitude d'esquisser des mouvements singuliers de l'Espace comme Devenir : pour connaître, il faut d'abord se pénétrer du rythme de l'apprendre. C'est en ce sens que la capture de l'extension rend progressivement l'Esprit à lui même. Elle fait découvrir que, comme la Nature, l'Espace est l'Entendement visible [8].

Comme l'intuition intellectuelle, la méthode scientifique exigée par Grassmann introduit à une connaissance qui ne laisse pas intact le dualisme objectif-subjectif, mais au contraire, se risque à la création même de l'objet, à affirmer l'identité fondamentale du produit et de la productivité, identité d'autant mieux pensée, que le mode d'articulation qui les distingue est plus précis. On ne s'étonnera pas si les notions de dimension et d'orientation jouent un rôle aussi crucial dans la capture de l'extension. Elles menacent toujours subrepticement la neutralité de l'observateur face à son objet. On ne peut les penser à la façon dont on s'assure d'une chose. Elles suggèrent l'existence d'un savoir inobjectif de l'étant et qui pourtant n'est pas rien.

La dimension n'est ni une propriété, ni un attribut de l'objet accompli. Elle concerne à la fois l'objet et son mode de production. Je peux bien sûr, connaître les mensurations de telle ou telle chose, en itérant un certain

geste (toujours le même !), transporter un étalon unité arbitraire (déjà choisi). Cette unité commode s'applique sur l'objet mais ne m'implique pas dans son procès de connaissance ou de production.
Une pensée de la dimension ne saurait se satisfaire d'un point de vue quantitatif aussi trivial : la dimension n'est pas seulement un " nombre ", c'est un degré, un échelon qu'il a fallu gravir. Elle participe d'un évènement de pensée : de lui où l'espace est apprécié par le savant comme déploiement prochain d'une phase, comme libérant un relief, comme possibilité de polariser une grandeur [9].

Par la dimension, l'intervalle qui n'était que le résidu d'espace entre deux choses, se charge de tensions et se révèle être la condition positive de la naissance d'une structure. La dimension sanctionne l'accès à un degré inattendu de l'Être : elle prend la mesure d'un Devenir.

L'orientation ne ménage pas non plus l'Étendue morte : en articulant un " côte à côte " avec " un haut et un bas ", elle révèle que ce qui a été juxtaposé, l'a été dans un certain ordre. En manifestant une préférence, elle éveille une puissance de scission permanente au sein de ce qui a été posé : elle peut se réactiver sans s'affaiblir : elle peut donc être partie-prenante d'un engendrement dialectique. Dialectique est ici à reconnaître comme " l'intelligence qui sépare et en raison même de cette séparation, introduit dans les choses un ordre et leur impose une forme ". La dialectique n'abolit pas la différence, elle l'éclaire et l'approfondit. Engendrer (Erzeugen) doit être ici associé à la capacité de manifester le ressort de quelque chose, (sich in Zeug legen : faire tout ce qu'on peut).

Pour faire ressortir l'étoffe du spatial, je dois le saisir comme incitation à s'amplifier (erweitern). L'espace ne s'exténue plus à écouler un même être-autre. Il se ressaisit par la vitesse et l'orientation et celles-ci ne se dissipent pas dans une pure expansion. L'espace peut être saisi d'emblée comme existence au sens de " procès hors de soi, auto-manifestation et accession à soi-même en cette auto-manifestation " [10].

Références de cette partie

[1] M. MERLEAU-PONTY : Le concept de la Nature dans résumés de cours (p. 91)

[2] G.F. HEGEL : Science de la logique - logique de l'Être (I) (p. 171) trad. Labarrière

[3] J.P. SARTRE : Critique de la Raison dialectique (p. 207)

[4] SCHELLING : Nature de la liberté humaine (N L H) (p. 226) trad. Jankelevitch

[5] GRASSMAN dans son introduction de l'Ausdehnunglehre (A. 1844) ne se satisfait pas des démonstrations obtenues " après avoir subi aveuglément et au hasard pendant un certain temps chaque pas. " Une telle démonstration ne laisse peut être rien à désirer du côté de la rigueur mais elle n'est pas scientifique : il lui manque la deuxième exigence : la vue d'ensemble (Ubersichlichkeit)

[6] G. SIMONDON : L'individuation psychique et collective (p. 30 - Aubier)

[7] W.R. HAMILTON : Lectures on Quaternions (préface)

[8] SCHELLING : Un système de la philosophie de la Nature " La Nature n'est que l'organisme visible de celui qui existe invisiblement dans notre entendement, elle ne peut agir autrement qu'avec régularité et finalité " (trad. Jankelevitch) (p. 163)

[9] SCHELLING : Déduction générale du processus dynamique (1800)

[10] M. HEIDEGGER - SCHELLING : Trad. Courtine (p. 190)

II - DÉDUIRE OU ARTICULER

L'introduction de Grassman prétend " déduire " le concept de Mathématique pure puis celui de l'Ausdehnunglehre. Il ne s'agit d'ailleurs pas d'une déduction d'énoncés à partir de corps d'axiomes, mais de mettre en œuvre une discipline de discernement et qui séparent des degrés d'articulation. Pour Grassman, unir n'est pas coaguler mais être capable de mobiliser une puissance de distinction issue du flux même du Devenir. (" flüßig gewordene ").

Grassman distingue d'abord (ce qui est classique depuis Aristote) entre les Sciences " réelles " et les Sciences " formelles ". Toutes deux se donnent immédiatement comme résultant d'un faire-face entre l'être représenté (produit par la pensée) mais, pour les premières l'être représenté existe par lui même alors que pour les secondes il est posé par la pensée.

Le caractère problématique du faire-face induit par les sciences " réelles " saute aux yeux ! Pour les sciences " formelles ", l'épreuve est encore plus pénible : cette fois, pensée réflexive se déchire elle-même !
Elle doit négocier avec " son " formalisme qui se dresse maintenant devant elle comme menaçant. En effet, même si la preuve est administrée par une série normée d'actes de pensées, le caractère " scientifique " au sens de la " mise en état " fait cruellement défaut [1].

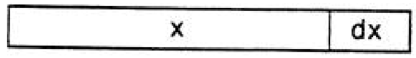
C'est pourquoi par réflexivité, les sciences formelles, à peine posées, éclatent en une Dialectique vouée " à la recherche de l'unité " et une Mathématique commise à l'étude du particulier (à l'individu en tant que partie). On pourrait croire, dès lors, que Grassman reste prisonnier des dualismes dénoncés avec véhémence par la Philosophie de la Nature.

Nous verrons au contraire, que toute son introduction et son style d'exposition (pas assez " axiomatique " et " obscur " selon certains) [2] impliquent un effort inouï pour saisir au vol le " comprendre du comprendre ", pour accéder à une plus grande intelligibilité de la géométrie par la notion d'engendrement, mobilisant ainsi des forces lovées au sein même de l'Espace.

À ce brutal face à face du réflexif, qui entraîne le philosophe-géomètre dans une confrontation stérile avec la rébellion de ses propres objets, l'Idéalisme allemand et Grassman substituent la continuité d'un procès, d'une involution intensive dont chaque spire enveloppe un degré supérieur d'épanouissement des formes, l'invention d'une articulation frôlant avec plus de subtilité l'origine géométrique de la pensée. " Le lien le plus intime ne se dessine qu'à la faveur d'un épanouissement progressif, chaque degré de séparation des forces est marqué par l'apparition d'un nouvel être... " [3].

On devine facilement que la dialectique du continu et du discret comme génération et procès de distinction de phases (ce qui ne présuppose aucune successivité) joue un rôle crucial dans la déduction dialectique de l'Ausdehnunglehre.
Continuité et discrétion se font face comme des contraires. Il s'agit d'assumer radicalement cette hostilité pour mettre à jour le procès qui les engendre et les distingue.

La permanence triviale du " stetig " nous livre immédiatement la forme continue [4]. Le Devenir se donne alors comme débit avec la monotonie d'une constante diversité. Au " stetig " fait face la promptitude zélée du Discret, de l'acte qui pose et lie. Le travail dialectique s'efforce de saisir la position et la liaison, non comme des actes, mais comme les moments d'une processualité continue (au sens du " flüBig gewordene "). Si je pose des termes a, b que je lie <u>ensuite</u>, je n'obtiens qu'une <u>abstraction</u> de la relation. Pour le penser concrètement (ou ici ce qui revient au même dialectiquement), je ne dois plus opposer des opérateurs à des termes, mais penser comme contemporains la liaison et la position du deuxième terme : ce dernier ne préexiste pas à la liaison. Leibniz avait déjà bien vu que l'élément différentiel dx d'une variable x ne se juxtapose pas à x comme le ferait une excroissance, mais articule une extension déjà disponible et une intensité sur le point de s'étaler :



C'est donc uniquement la scission abstraite du flux du Devenir en un avant et un après qui légitime l'opposition Continu-Discret. Ce qui est posé et lié - le Discret - peut être compris comme continu (comme devenu) et ce qui " s'écoule continument peut être séparé par l'entendement en restaurant la disjonction entre la liaison et la position. Dans ce derniers cas, ce que Grassman appelle les moments singuliers du Devenir [5], sont transis en purs actes de liaison opérant sur des termes donnés.

La confrontation du Discret du Continu doit donc être pensée en termes de degré et de fluidité plus ou moins grand (Grassman dit : " le contraste entre continu et discret est fluide " [6]). Ceci nous mène au cœur de la processualité dialectique : la question de l'invention d'une articulation.

L'articulation ne prétend pas concilier deux contrastes A et -A, elle contourne leur affrontement. Elle invente un nouveau mode de fluidité en déployant un éventail de degrés dont -1 et 1 sont les branches extrêmes : (ils ne sont plus opposés mais s'écartent de 180°). Ce qui se tenait en face-à-face hargneux est maintenant pensé comme les deux volets d'un diptyque. L'articulation préfigure la forme et mobilise l'Espace. Ni " matérielle ", ni " formelle ", elle est manuelle : elle palpe et attendrit. (Schelling parle de " la tendresse de l'articulation "). Elle permet de séparer sans détacher, de tendre sans rompre. Elle exalte le conflit de termes sans subordination : les polarisations se substituent aux oppositions. Les chocs, les impulsions ne séduisent que les pensées fascinées par l'actualité et les individus accomplis. Articuler c'est toujours se ménager un nouvel enveloppement, découvrir un matériau plus ductile que celui des côtés [7].

Une articulation ne relie pas deux contenus ou deux segments disjoints qui lui préexistent : elle saisit l'émergence même de ses côtés à partir d'un point d'indifférence.
Dans sa fourche, l'articulation retient le produit et la productivité. Elle participe toujours de la libération d'une dimension. En esquissant dans l'air tout un spectre de virtualités, elle manifeste que c'est toujours un geste qui multiplie le savoir. Elle ne classifie pas, elle discerne des degrés et éveille des rythmes. L'articulation s'esquisse dans le ruissellement du Devenir : sans elle, la constance se dégrade en subsistance (le " stetig "). Il y a bien une patience mobile de l'articulation qui sait se maintenir hors des éternités qui n'en finissent pas et des prothèses qui cessent trop vite.

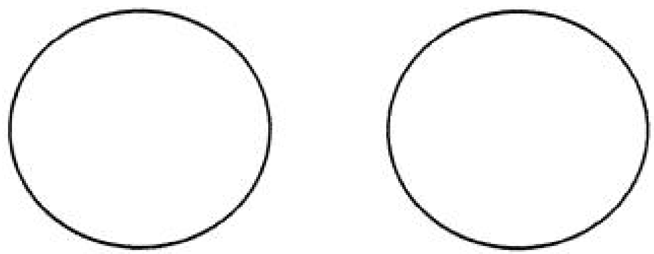
Comme les contrastes Continu-Discret, l'Égal et le Distinct résultent d'une activité de polarisation : c'est ainsi que peuvent être discernées les Formes Algébriques " devenues par l'Égal " et les Formes Combinatoires " devenues par le Distinct ". Il s'agit de trouver l'articulation qui permet de passer continument de l'Égal au Distinct. L'écriture suggère la solution. Lorsque j'écris $A_1 = A_2$, l'expression $A_1 = A_2$ indique bien que, de A_1, on peut dire " la même chose " que A_2 (" l'égal est ce qui peut être mutuellement substitué dans chaque jugement " [8]), mais l'indexation rappelle que A_1 et A_2 sont " quand même " différents : à la lecture je suis obligé de séparer A_1 et A_2. $A_1 = A_2$ peut se lire A_1 " est " A_2, A_1 fonde A_2, ou mieux, A_2 expose A_1 ou A_2 se dégage de A_1.
Une égalité parfaite s'engloutit alors immédiatement dans l'Identité $A = A$. On ne peut donc oublier que l'égalité posée est toujours issue d'une procès d'égalisation et d'évanouissement des inégalités, d'un dispositif de porte-à-faux [9].

Les formes Égal et Distinct émergent avec l'ouverture d'un compas où A_2 expose progressivement A_1. Comme l'égalité parfaite, la diversité radicale n'est qu'une abstraction : si A_1 est donné différent de A_2, cette séparation terminée a certainement mobilisé une activité qui les liait en quelque manière.

Le concept du Distinct par " lequel un particulier est coordonné à une autre particulier " et le concept d'Égal par " lequel il est subordonnée avec d'autres particuliers à un genre qui leur est commun ", s'articulent donc par des degrés de congruence que le philosophe-géomètre se doit de discerner.

Remarque

L'entrelacement illustre l'intrication entre position et liaison.

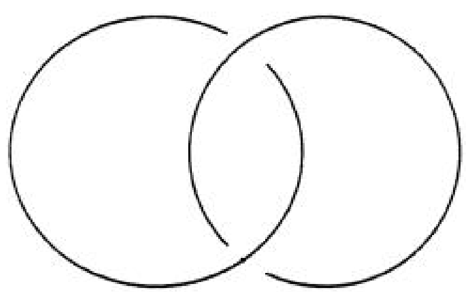


C1 C2

Je peux dire des deux cercles ci-dessus qu'il sont " simplement l'un à côté de l'autre ", l'acte de pensée qui les lie reste totalement disjoint de l'acte qui les pose. Je peux tracer l'un (C1) puis l'autre indépendamment : l'indexation est totalement arbitraire et simplement là pour rappeler qu'ils sont " deux à être pensés ensemble " et qu'ils reposent sur un fond indifférent.

Ici, la juxtaposition ignore toute prédisposition.
On peut y voir le diagramme même de l'addition avec sa synthèse totalement réversible, sa commutativité (Versetzbarkeit), sanctionnant une séparation accomplie et l'effacement radical de la main qui a tracé.

L'entrelacs ci-dessous se manifeste de toute autre manière.



Ici la connexion se noue. Il n'est plus question maintenant de dessiner les deux cercles séparément : je dois impérativement lever la main pour capter les dessus et les dessous de cette entité rebelle à toute immersion dans le " plat ". Je ne peux prétendre avoir posé d'abord et lié ensuite (ou l'inverse !), il s'agit bien du diagramme d'une relation vivante, nullement extérieure à ses termes. Quelque chose a été tissé et, pour séparer, je dois briser.

Cette cohérence qui semble nous narguer n'est pas celle de la solidité déposée dans certains volumes, elle résiste comme une intrication capable d'affirmer le relief par elle-même.

Références de cette partie

[1] GRASSMAN : “ In den Stand gesetzt wird ”

[2] G.G. GRANGER : Essai d'une philosophie du style p. 89... “ Grassman est sans doute le plus philosophe : c'est aussi incontestablement le plus obscur ” .

[3] SCHELLING : Nature de la Liberté humaine (p. 251), trad. Jankelevitch

[4] Stetig : incessant, assidu
(stets) : en adverbe : toujours

[5] “ Einzelne Momente des Werderns ”

[6] H. GRASSMAN : Introduction de l'Ausdehnunglehre 1844 (A 1844)

[7] LEIBNIZ : Pour la question des “ ductus ” cf. Dynamica de Potentia (section I, III - P. 307, 309, Gerhardt)

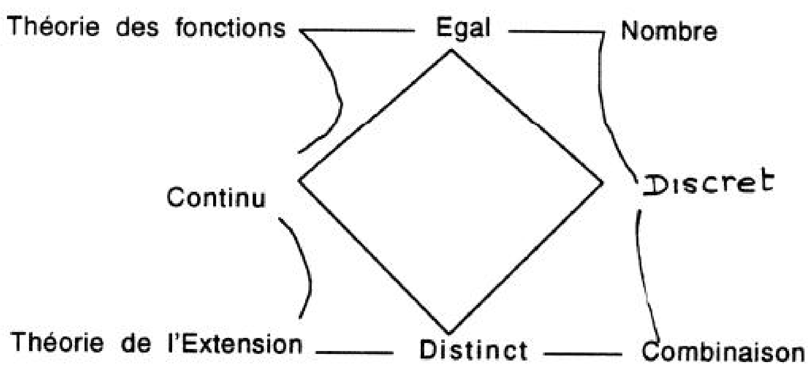
[8] H. GRASSMAN : (A 1844 chp. concernant l'égalité)

[9] Ceci expliquerait pourquoi les “ mesures par zéro ” en physique sont les plus précises et les plus fondamentales. Elles s'immiscent dans le mouvement même d'engendrement de l'objet.

III - LE PRODUIT GÉOMÉTRIQUE MULTIPLIE LES FORMES SANS CORROMPRE L'UNITÉ

" Nous comprenons par théorie générale des formes la série des vérités qui, de la même manière, se rapporte à toutes les branches des mathématiques et qui ne suppose donc que les concepts généraux de l'égalité, de la diversité, de la liaison et de la séparation ".

Les contrastes et les articulations précédents invitent, en effet, à dessiner un losange ou l'Égal et le Distinct, le Continu et le Discret s'affrontent aux sommets opposés.



Nous pouvons maintenant lier les sommets adjacents, mettant ainsi en évidence la Forme Algébrique discrète : le Nombre (" le rassemblement de ce qui est posé comme égal "), la Forme Combinatoire discrète : la Combinaison (" le rassemblement de ce qui est posé comme distinct "), la Forme Algébrique continue (" la théorie des Fonctions ") et enfin la Forme Combinatoire continue (la théorie de l'Extension).

Ainsi sont distingués les quatre pôles des " sciences formelles ".
Ceux-ci pourtant ne doivent nullement être pensés comme <u>disjoints</u> mais <u>articulés</u>.

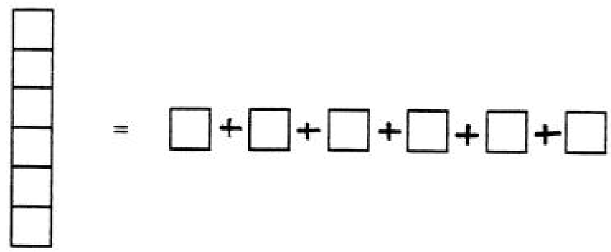
La dialectique intensif-extensif, appliquée au Nombre, permettra de mieux saisir la théorie de l'Extension comme mobilisation de l'Espace par l'orientation qui <u>prédispose</u> avant toute extension. C'est-à-dire qu'ils permettent de rassembler le plural dans une détermination simple. Le degré ne tente pas d'épuiser une multitude mais sanctionne l'achèvement dans un ordre de perfection.

À l'opposé, la quantification extensive comptabilise les agrégats, en collationnant des unités. Elle évalue le multiple par décomposition : la dispersion lui est essentielle.

La formule " évidente "

$$n = \sum 1 \tag{1}$$

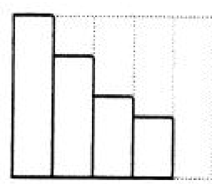
illustre la définition de Grassman " le nombre est le rassemblement de ce qui est posé comme égal ". (1) montre que n est le pôle vertical-intensif qui capte par la simplicité d'un acte la répétition monotone de la même unité 1 [1]). Le signe = est l'articulation de la décomposition discrète qui expose le nombre à la fois comme



même " échelon " et donc comme degré et comme 1 répété n fois (respectivement comme Zahl et Anzahl). Le diagramme ci-dessous rend flagrant l'articulation de la fragmentation et de l'unification. Ce type de diagramme tire toujours sa richesse de la tension vertical-horizontal et de la dimension qu'elle convoque subrepticement.
La formule

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

" me saute au yeux " si j'organise un dispositif qui permet de sommer des degrés. En complétant par des pointillés je fais apparaître un rectangle, " une nouvelle dimension ". Cette dimension étant acquise, la formule (2) suit par division par deux.



Retenons que la conjugaison horizontal-vertical permet de mobiliser la pure dispersion de l'auseinanderseinende (le " étant l'un-à-côté de l'autre simplement extérieur ") en déployant le vertical.

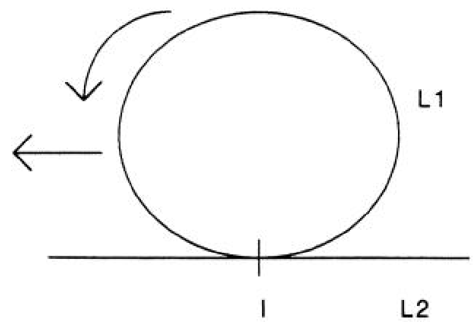
La polarisation intensif-extensif se retrouve également dans la formule $E = \{a_i, ..., a_n\}$. Le symbole E rassemble dans l'unité d'un acte ce que le membre de droite exhibe comme agrégat d'éléments différents. Une fois de plus le signe = permet d'exposer une pluralité en multitude. L'égalité apparaît comme la forme du " faire " et du " défaire ". L'articulation = autorise un jeu de sommation-décomposition dont " E " et a_1, ..., a_n ne sont que les moments abstraits.

Si maintenant je considère la décomposition en unités égales comme Devenir, j'obtiens la formule fondamentale du Calcul Différentiel et Intégral (Stokes)

$$L = \int_O^L 1dx \tag{3}$$

qui exprime à la fois comme grandeur intensive (membre de gauche) et comme grandeur extensive (membre de droite).
Rappelons que les degrés sont distincts mais ne sont pas disjoints puisque la simplicité est essentielle à la quantité intensive. La quantification s'effectue de l'extérieur par un dispositif de développement et d'enveloppement. (" Base et Roulante ").

Un tel dispositif me permet de passer de tel degré (d'arc ou de température) à tel autre degré : ce peut être une colonne de mercure qui se dilate ou un cercle qui roule sur une droite. La figure ci-dessus manifeste bien l'intensif comme charnière : c'est le point de vitesse nulle qui articule la longueur L1 sur le cercle et la longueur L2 sur la droite [fig. 3].



Ces dispositifs permettent de développer les degrés en somme d'unités. Grassman dit très bien que la grandeur intensive " ne se défait pas " [2] en elle-même. Elle s'étale seulement sur le mode de l'accroissement.

Les deux figures ci-dessous opposent bien l'intensif et l'extensif la force appliquée en un point sans aucune dispersion, extériorise une pure verticalité et contraste avec le segment extensif, essentiellement dispersé.

La formule (1) peut être comprise comme une sommation- décomposition mais nous allons tenter de mieux la voir comme exposition d'une vitesse suivant une longueur. Les cinématiciens-philosophes du Moyen-Âge avaient bien su visualiser par diagrammes le transport d'un sujet plus ou moins affecté par la vélocité [3]. Ainsi, se trouvaient articulées, les figures abstraites de la Force et du Segment. L'intensif n'est plus prisonnier de sa propre pétulance. Promu en capacité d'étalement, il peut enfin " se défaire " comme une longueur. Du coup, la longueur du segment ne se réduit plus à une distance morte : elle évalue l'achèvement d'un parcours. La trajectoire est bien ce qui met en œuvre l'Espace. La quantité extensive prise " seule ", se contente en quelque sorte de visiter des places déjà données, d'adopter indifféremment divers " états " [4] alors que maintenant elle quantifie l'élément dans son jaillissement.

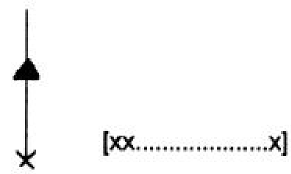
L'extensif est redressé, l'intensif est discipliné par la forme mouvement unité.

Le père de Grassman " par analogie avec le produit arithmétique " avait déjà défini le produit géométrique : " le rectangle lui même est le vrai produit géométrique si l'on prend la multiplication dans son sens le plus pur et le plus général... La multiplication est seulement une construction de degré plus élevé... " " En géométrie, le point est l'élément producteur et la ligne émerge de lui par une construction... Le rectangle émerge si nous traitons la droite de la même manière que nous traitons le point. La situation est identique en arithmétique. Dans ce cas, l'unité est l'élément producteur originaire. L'unité est vue simplement comme donnée... Si maintenant le nombre est pris comme nouvelle base pour compter (en le prenant comme nouvelle unité)... la multiplication apparaît bien comme la production d'un nombre d'ordre plus élevé, un nombre dont l'unité est déjà un nombre. Un rectangle est le produit géométrique de sa base et sa hauteur et de produit se comporte comme un produit arithmétique... " ou encore " en géométrie le point est l'élément, la synthèse est le mouvement d'un point dans quelque direction... " [5].

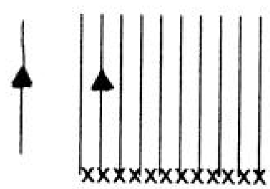
H. Grassman poussera plus loin en comprenant que le rectangle n'est pas une " abstraction " qui flotte dans l'Espace et qui " soutient " l'intuition. Il se délivre de la pesanteur du réalisme géométrique en saisissant la dimension comme capacité d'exposition et l'orientation comme articulation avant toute dissipation dans la grandeur numérique (longueurs, aires, volumes, etc...).

Contrairement à l'évaluation de l'aire du rectangle, qui traite base et hauteur sur le même pied, Grassman, dans la trace d'Oresme exige que la distinction des pôles intensif et extensif, soit manifeste dans la règle de formation du produit.

Je peux relier les diagrammes du segment dispersé et de la force appliquée



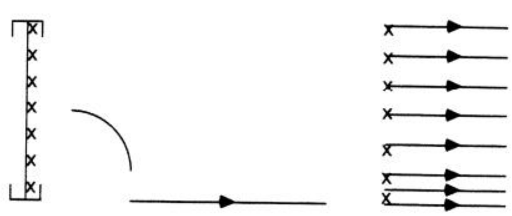
en exhibant la formation d'extension $I_1 \wedge I_2$ produit dans cet ordre par I_1 puis I_2 comme :



J'anime chaque point de I_2 (dont les points sont essentiellement dispersés) par le pur transport conduit selon I_1. Le premier terme intensif se présente comme celui qui prendra la mesure de l'engendrement, le deuxième terme comme la base de l'engendrement.

La formation d'extension $I_2 \wedge I_1$ permute les rôles de I_2 et I_1.

Son diagramme est :



H. Grassman définit l'addition des formations et montre ensuite que :

$$I \wedge (I' + I") = I \wedge I' + I \wedge I"$$

$$(I' + I") \wedge I = I' \wedge I + I'' \wedge I$$

Ces propriétés ne le différencient pas d'un produit de grandeurs numériques contrairement à la relation :

$$X_1 \wedge X_2 = -X_2 \wedge X_1 \tag{4}$$

qui dévoile le rôle fondamental de l'orientation.

Le produit de Grassman est bien une véritable multiplication : une opération productrice de pluralité. L'addition se contente de pouvoir " penser ensemble " une multitude d'entités en les juxtaposant, comme on place des jetons sur un fond indifférent, " l'un à côté de l'autre ". Elle ne résout que " formellement " l'éparpillement et les " sommes " qu'elle fabrique risquent toujours de basculer dans la fragmentation : pour l'addition, le multiple est toujours issu d'une décomposition dégradée de l'unité.

La multiplication distingue un multiplicande et un multiplicateur. $N = P_1\ P_2$ ne s'obtient pas en juxtaposant P_1 et P_2 mais en considérant déjà l'un des membres comme une unité " N est le produit de P_1 par P_2 ". La multiplication numérique est bien sûr " commutative " : mais la synthèse privilégie toujours l'un des membres. C'est comme dirait Grassman une liaison de 2^e degré elle est compatible avec les décompositions éventuelles (distributivité par rapport à l'addition). Elle permet enfin de penser une multiplicité qui loin de corrompre l'unité, avance dans la diversité pour mieux en manifester le déploiement.

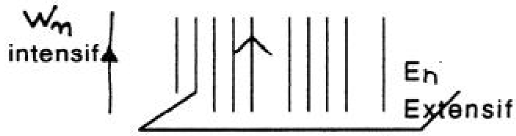
Ici l'unité du plural est héritée de la même mobilité (celle de la hauteur) qui emporte tous les éléments de la base. Le produit géométrique renforce d'ailleurs la distinction entre l'agent (ce qui mesure) et le patient (ce qui nourrit l'engendrement) en exigeant de préciser soigneusement l'ordre de formation des produits : a.b s'obtient par déplacement des points du premier segment (la base) sous l'action du deuxième (la hauteur). Ce produit n'est pas disponible comme une chose étendue, là, dans l'Espace ; ce n'est pas une figure de la Raumlehre. L'ordre des symboles, qui conduit la main, manifeste l'intervention géométrique du " par ". La juxtaposition, se contente de " penser ensemble " deux éléments qui, restent étrangers l'un à l'autre : " A+B " n'est pas vraiment un " mot ". Ici la main s'implique dans le produit ; elle coordonne une successivité et un côte à côte : elle apporte la nouvelle dimension en incarnant une orientation : grâce au produit géométrique, le plan s'empare d'une mobilité qui semblait réservée au vecteurs [6]. Cette mobilité anime le parallélogramme ABCD ou le triangle ABC ce qui me permet de choisir, d'énoncer a puis b ou b puis a, me permet aussi d'opter entre deux virtualités de circulation : c'est ainsi que le " spath " étendu (pour Grassman : spath : parallélépipède) gagne de l'épaisseur par scission dans soi.

Lorsque je parle de ABCD (ou lorsque j'écris le mot ABCD) je le conçois déjà comme un parcours orienté. Les deux circuits qui s'esquissent en pointillé dans le seul énoncé du produit géométrique ne s'ajoute pas à la figure comme une excroissance (une géométrie plus " sophistiquée ") mais sont reconnus par J. et H. Grassman comme ce qui permet d'éveiller l'étendue par dédoublement. Ce sont bien deux manières de " tourner autour ", qui enveloppent réellement le domaine alors que (A, B, C, D) n'est qu'un simple agrégat de lettres, mais ABCD, dans cet ordre est déjà un mot : c'est bien l'enjeu du non-commutatif : saisir ce qui ne peut être " pensé ensemble ", ce qui se donne irréductiblement comme un procès.

C'est peut-être cette manière d'articuler une base, une hauteur, et un volume par l'orientation qui fait qu'une dimension posée en appelle une autre. Une " ligne " peut être parcourue dans un sens ou dans l'autre à une vitesse v mais pour saisir dans l'intuition ces deux mouvements, je dois ménager une profondeur : v et -v se réfléchissent l'un dans l'autre par réflexion (ils ne sont pas " l'un à côté de l'autre ") et pour sortir de ce piège je dois inventer une nouvelle dimension en les repliant l'un sur l'autre.

Ce geste de pliage s'esquisse avant toute immersion dans le Spatial (ici avant tout parcours accompli sur la droite). Cette manière de saisir " n'a suivant le concept aucune limite " [7] et nous pouvons dès lors parvenir à des systèmes de dimension arbitraire.

Il suffit de supposer une " base " E_n d'ordre n déjà construite, une autre " hauteur " et une " enveloppe orientée " d'ordre $n + 1E_{n+i}$ (un volume associé à la donnée d'un mot de n+ lettres).
Nous obtenons des formules du type



$$E_n = W_n.E_{n-1}$$

$$E_n = W_n.W_{n-1}.W_1$$

$$A.B = (-1)^{rs}B.A$$

(A et B sont des formations d'extension d'ordre r et s)

Nous obtenons ainsi des formations d'extension d'ordre n+1.
Celles-ci, par réflexion de miroir et dilatation conduisent au système linéaire d'ordre n+1.
Le produit extérieur permet d'itérer l'articulation fondamentale que réclame l'intuition d'un circuit à partir des mouvements de deux mobiles sur une droite ou de l'espace à 3 dimensions requis pour le rabattement d'un plan orienté sur un autre.

Cette itération associée à l'orientation et à l'idée que l'Espace n'est pas la coexistence de figures transies dans l'étendue mais qu'il prolifère comme des mots, enrichit la notion même de dimension. Celle-ci n'est pas seulement un rang qui marque de l'extérieur tel ou tel système " son degré d'indépendance ", je peux opérer sur elle ; ce n'est plus un " ordinal abstrait ".

Je peux certes définir la dimension n+1 à partir de la dimension n par adjonction formelle mais je ne peux prétendre l'avoir vraiment produite, l'adjonction me permet simplement de " penser ensemble " un vecteur W_{n+1} et un système (W_1, W_n) auquel il n'appartient pas alors que le produit extérieur ne sanctionne positivement que les formations d'extension nouvelles : il s'annule pour toute adjonction triviale [8].
De plus, l'amplitude orientée $W_1......W_{n+1}$ enveloppe le système des vecteurs W_1, W_n, W_{n+1}, elle ne se contente pas de réunir E_n et $W_n + 1$. L'intuition de l'enveloppement précède la construction effective de la formation d'extension d'ordre n+1 et, comme les degrés d'arc appellent une rectification qui permettent de les sommer (cf : figure 3), le produit extérieur me permet d'étaler ces degrés d'indépendance.

Le produit régressif ou impliquant (eigewandte Produkt) [9]. Le produit extérieur " explique " l'expansion spatiale : il construit la forme d'extension qui saisit et enveloppe au plus près l'étendue de la réunion issue des engendrements X et Y.

La pénétration de Grassman lui permet de sentir que cette priorité naïve de l'expansion fondée sur les degrés d'indépendance, devait être équilibrée par une démarche symétrique : une multiplication qui exposerait la contraction spatiale et répondrait à la question : quelle serait la forme qui envelopperait ce qui est commun à deux systèmes A et B ?
Grassman définit donc le produit régressif qui enveloppe l'intersection comme le produit extérieur enveloppait l'union.
Si par exemple :

$$A = (e_1.e_n)(e_{n+1}...e_k)$$

$$B = e_1 ... e_n . e_{n+1}$$

Le produit régressif de A et B se note $A.B = e_1 . \, . e_n$.
Ce produit régressif permet de descendre d'un système de dimension n jusqu'à 1 la dimension O comme le produit extérieur avait permis d'épuiser E en " partant " de la dimension O (l'unité de dilatation = 1). En démasquant le caractère unilatéral et " naturel " de cette expansion, le produit régressif fait éclater les limites d'un constructivisme, cramponné à la finitude de ses itérations et foncièrement incapable de concevoir, les horizons (ici l'enveloppe orientée E) toujours donnés sur le mode de l'implicite et du composé.

Grassman a génialement senti la nécessité d'équilibrer cette situation : E peut être vu comme un horizon à partir de 1 et 1 comme un horizon à partir de E et ceci par une symétrie qui n'échange plus les figures de l'Espace mais concerne la dynamique même de la pensée.

Références de cette partie

[1] Cf. à ce sujet M. Merleau-Ponty " La Prose du Monde " p. 161

[2] " Hingegen als Beispiel der intensiven grôsse etwa einen mit bestimmter kraft begabten Punkt, under hier die Elemente nicht sich entaüssern " .
" entaüssern " " se défaire " dans soi, s'affaisser. La force concrète (au sens dialectique) étale son intériorité. La force abstraite n'est qu'une pure extérioration (Aüsserung) qui semble " attachée " à la matière par un point. La force concrète produit le travail W = FL ce concept permet d'envelopper l'extérioration.

[3] G. Châtelet : La Toile, le Spectre, le Pendule (Fondamenta Scientiae) (10)2 1989

[4] La mobilité permet de poursuivre constamment un même changement fondamental (A 1844 ch.13). " Il est important de retenir que tous les éléments ainsi engendrés ne doivent pas être conçus comme déjà donnés auparavant. Ils doivent être saisis dans leur jaillissement originaire (Ursprüngliche Erzeugung) " .

[5] Cité par MJ. Crowe dans History of Vectorial analysis (p. 58-59).

[6] Cf. en particulier l'introduction des " lectures on quaternions " de R. Hamilton.

[7] A 1844 ch. 16

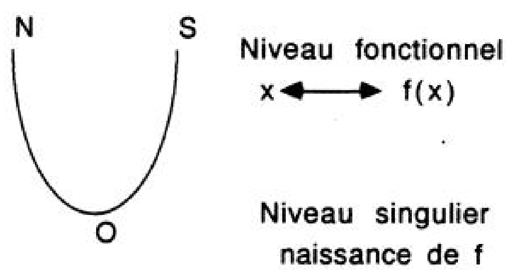
[8] A 1844 ch. 31

[9] A 1844 ch. 125

[10] Pour différents exposés de la théorie de Grassmann voir : G. PEANO : Calcolo geometrico secondo l'Audsdehnung Lettra di H. Grassmann (Fratelli Bocca Turin 1888)
BURALI-FORTI : Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann (Paris-Gauthier-Villars 1897)
Voir aussi l'article remarquable de Barnabei-Brini-Rota on the Exterior Calculus of Invariant Theory (journal of Algebra 96 1985 (120 160))

IV - L'AMBIGÜITÉ OÙ GERME L'OPÉRATION

Apprécié comme l'âge d'or des grands systèmes philosophiques, comme celui de l'émergence de la notion de structure, le début du XIX^e siècle est peut être aussi celui où le centre change de statut : le point à l'infini de l'Âge classique cède la place aux points neutres d'indifférence qui marquent les degrés d'équilibre et d'où jaillissent continûment les polarités. L'existence d'un tel centre d'indifférence dans les diagrammes électriques et magnétiques fascine physiciens et philosophes spéculatifs [1] comme les pôles Nord et Sud d'un aimant semblent issus d'un point neutre, il est tentant de penser que les différences reçues, les grosses inégalités quantitatives ne peuvent amorcer les procès d'individuation. Leur hétérogénéité arrogante ne produit aucune dimension : les formes nouvelles ne surgissent que lorsque s'esquisse une manière de congruence et cette congruence semble bien associée aux inflexions de la main qui trace une courbe, à l'ambigüité du choix des racines d'une équation, à ces points étranges où les charges s'équilibrent, bref à ces lieux où l'entendement vacille. Aux centres d'indifférence, est atteinte la plus haute incertitude et exigeant donc la décision la plus irréversible.

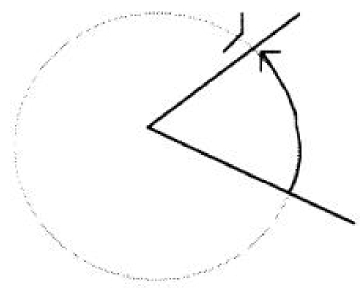


Les philosophes classiques avaient beaucoup spéculé sur l'infini car les “ formes indéterminées ” qu'il secrétait, permettaient d'abolir les différences quantitatives. De toute manière, l'infini était pour les mathématiciens du début du XIX^e siècle une “ singularité ” bien inoffensive apprivoisée par la perspective qui “ ramène ” facilement les pôles à distance finie !

Le “ singulier ” menaçant est celui qui révèle (souvent cruellement) la naïveté du “ d'une part et d'autre part ” et qui se manifeste en mathématiques par l'effondrement d'un certain mode “ canonique ” de correspondance. Les points de ramification, où se proposent plusieurs paramétrages ($Z_i = \psi_i(t_i)$), rendent donc possibles plusieurs saisies fonctionnelles. Ces saisies sont toujours fondées sur l'articulation “ évidente ” d'une ordonnée et d'une abscisse (paramètre) “ générique ”. Cette nécessité d'opter pour telle ou telle détermination qui accompagne toujours la rencontre d'un centre d'indifférence, trouble les géomètres il devient évident que ces points promettent un foisonnement de correspondances bien plus vertigineux (et bien plus difficiles à contrôler !) que les “ formes indéterminées ”.

Le centre, comme point à l'infini, permettait certes de dominer les différences quantitatives qui séparent les être finis, mais en subjuguant extérieurement les particularités. Le centre d'indifférence nous installe au cœur de l'individuation : le dispositif de porte-à-faux qui le détecte permet d'envelopper tout un faisceau de virtualités sans les confondre : la symétrie est redécouverte comme productrice de différences.

Le problème de la mesure des angles fournit un exemple des pouvoirs de ces centres : je crois pouvoir saisir facilement l'écart qui sépare les “ côtés ” d'un angle aigu : il semble être maîtrisé par le simple concept de distance. (voir la figure ci-dessous)



Si maintenant, je désire me rendre présent le tour de main qui l'a fait apparaître, (ce qui revient à se donner un paramétrage continu) l'existence de deux manières de tourner indique bien que l'angle entre deux droites n'est pas disponible comme le serait la distance entre deux points d'une ligne. Un angle se dérobe aux saisies instantanées : il se n'expose que progressivement à partir d'un choix. Un point à l'infini n'implique aucun dilemme pour le géomètre il peut facilement être ramené à distance finie par une transformation " convenable ". Une " position " ne " donne clairement " alors que l'angle se démasque très vite comme procès ; comme " choix continu d'une détermination " et ce choix conduit à une réelle perplexité avec les " angles plats " ! Je ne puis évidemment disposer de ces angles [π ou $-\pi$] comme de grandeurs numériques ou distances franchies d'un coup d'œil. π et $-\pi$ sont des exposants : ils s'impliquent dans leur propre mesure pour ainsi dire (" l'exposant est ce par quoi l'étant prend sur lui même sa mesure ") : je dois faire revivre le mouvement qui leur a donné naissance en butant dès le début sur une indétermination.

La simple donnée d'une saisie fonctionnelle Y = f(x) (1) suppose trop vite acquise la séparation tranchée entre une position et ce qui a permis cette position. Une correspondance établie du type de (1) naît toujours d'une déchirure (" principe de naissance par phase stationnaire "). Bien avant la fonction, l'exposant capte une puissance d'opération sans " mise à plat ". Exposer n'est pas expliquer mais ménager une niche continuum au singulier en enveloppant toutes les déterminations virtuelles issues d'un problème (c'est l'intérêt des " fonctions multiformes " ou les corps de Galois associés à une équation).

Dans la notation X^2, 2 ne fonctionne ni comme un 2^e, ni comme 1 + 1, mais permet enfin de faire " interagir la grandeur avec elle-même "... Une ambigüité s'immisce toujours où apparaissent les exposants : c'est le prix à payer pour nouer produit et productivité et donner de la mémoire à la forme. Cette mémoire n'est pas déposée dans la forme : elle n'est réveillée que par l'intuition de l'intuition : l'ambigüité. L'intuition géométrique de la Raumlehre appelle toujours au secours la certitude, l'inertie rassurante d'un spatial enrobant tranquillement les choses. Cette intuition de l'intuition (dont rêvait le jeune Hegel) entreprend de disloquer les fausses évidences, invite à traverser les paliers d'ambigüité maximale pour remobiliser le savoir déjà acquis. Dans l'exemple de la mesure des angles, c'est précisément l'existence de deux chemins symétriques qui montre que l'intuition créatrice se meut dans l'espace des chemins.

L'exemple qui suit, le dédoublement des réels positifs, illustre nettement l'ambigüité associée au retournement dans soi de la grandeur.

Les réels positifs étant donnés, je peux obtenir les négatifs par une symétrie de miroir et ajouter ensuite l'élément nul. Ce dernier se détache alors nettement comme une excroissance et ce qui est construit ne possède que la cohérence médiocre de l'agrégat. Mais je peux aussi penser les nombres positifs comme un des feuillets issus d'un pliage de la droite : le point 0 apparaît alors comme point de pivotement et donc comme articulation.

Ici encore l'ambigüité, l'intuition de "second degré ", ne prétend pas " soutenir " un calcul (la simple considération des produits des opérations définie sur les nombres positifs ne me permettra jamais de les " dédoubler "...) mais suscite en pointillé une nouvelle manière de voir. Il y a bien deux manières d'étaler ou de replier les " côtés ", autrement dit d'exposer les réels.

Il est clair que O n'est pas un simple pôle : aucun changement de point de vue (" collinéation projective ") à distance finie ou infinie ne donne accès à la scission dans soi de la positivité la O est le point de ramification où se nouent deux saisies fonctionnelles ($y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$). Une nouvelle dimension se manifeste donc avec l'énoncé du problème :

$$(?)^2 = a$$

Celle-ci n'était nullement donnée dans la droite construite axiomatiquement. Les réels positifs doivent être saisis comme fendus en eux-mêmes ; ils acquièrent ainsi une épaisseur.

Nous touchons le point sensible de la Philosophie de la Nature : celui de l'intuition des degrés d'articulation, ceux où l'Être porte à faux, et où les différences quantitatives et choix " canoniques " de paramétrage s'évanouissent. L'ambigüité accompagne ces seuils critiques car elle seule confère une positivité dynamique à la séparation.

Deux quantités grossièrement inégales nous comblent de la certitude des dualismes établis. Victoire à la Pyrrhus ! On ne domine pas un antagonisme en jouant sur la contrariété de deux termes mais en réveillant l'affinité secrète qui les lie, en se glissant dans le mouvement par lequel la positivité se creuse une profondeur.

Si je ne donne pas deux solutions à l'équation $X^2 = a$ (égales en " valeur absolue "), la grandeur ne se mobilise pas ; elle s'affaisse dans soi et la productivité s'épuise dans le produit. De la même manière, si le produit de Grassmann ne reposait pas fondamentalement sur l'ambigüité d'un choix : ... d'abord le terme puis l'autre, et donc afin d'épaissir en deux feuillets le rectangle de l'intuition naïve, il manquerait la capture de l'extension faute de révéler le centre neutre où tout va se décider.

Par l'ambigüité de la racine-exposant, ce qui était posé dans l'unité d'un acte : appliquer une règle R, se déploie dans les continuité d'un geste. La positivité disponible, naïvement palpable, se fissure pour envelopper un spectre de solutions suivant la formule : $(?)^2 = R$. Cette formule, les Grecs l'avaient pressentie : ils savaient que " la droite à la puissance de son carré " [2].

Opposition, écartèlement, impossibilité, peuvent être les symptômes d'un degré d'intuitition à franchir mais la dimension nouvelle ne surgit pas " à cause " de l'opposition ou de l'impossibilité. Ces dernières m'invitent simplement à mépriser la certitude des clichés " intuitifs " mais elles ne " mènent " pas à la solution : l'articulation est un saut : ni épuisement déductif, ni une induction " abstraite " à partir de caractères communs.

Car le centre d'indifférence, l'exposant, s'impose toujours comme un degré de l'Être. Produit et productivité y sont indiscernables et les formes semblent avoir triomphé de l'ambigüité. L'exposant-racine offre sa mémoire et sa profondeur. Sa conquête participe de ce " pressentiment " dont parle Grassmann et qui agit bien avant la mise à plat de tous les moments de la vérité nouvelle.

Enfin peut être pensé l'évènement d'une séparation. Appréciée trop souvent comme rupture, d'ailleurs vite engloutie dans le fracas de disparités quantitatives, cette séparation des formes se joue maintenant dans l'infime recul dégagé par l'exposant : plus haute est la symétrie et plus irrévocable est la décision. Ce n'est pas le moindre des paradoxes de ce paradis étrange où les formes procèdent d'elles-mêmes sans blessure.

Références de cette partie

[1] ESCHENMAYER : Versuch die magnetischen Erscheinungen a priori abzuleiten (1795)
SDCHELLING et d'autres se sont beaucoup inspiré de cet auteur (" Toute qualité est polaire et électrique ") (cf : le beau commentaire de Marquet dans Liberté et Existence p. 115- 120) et aussi Schelling : Déduction générale du processus dynamique (1800)

[2] G.W. LEIBNIZ : Dynamica de Potentia (section III (2) p. 364) Ed. Gerahrdt

Remerciements

Messieurs, FLAMENT et BECKEMEIER m'ont permis d'accéder à leur traduction en cours de l'Ausdehnunglehre de 1844. Qu'ils en soient remerciés.